

FENÓMENO DE RESONANCIA MEDIANTE IMPRESIÓN 3D Y MECÁNICA COMPUTACIONAL

RESONANCE PHENOMENON USING 3D PRINTING AND COMPUTATIONAL MECHANICS

Téllez Méndez Adriana Anel¹, Viveros Mora Marino², Minquíz Xolo Gustavo M.³,
Espinosa Cuatlapantzi Gonzalo⁴, Flores Méndez Javier⁵

<https://doi.org/10.61117/ipsumentec.v8i2.384>

¹Tecnológico Nacional de México/Instituto Tecnológico de Puebla, anel.tellez@puebla.tecnm.mx, <https://orcid.org/0000-0003-3720-3728>.

²Tecnológico Nacional de México/Instituto Tecnológico de Puebla, marino.viveros@puebla.tecnm.mx, <https://orcid.org/0009-0006-0475-096X>.

³Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, gustavo.minquiz@correo.buap.mx, <https://orcid.org/0000-0002-9142-5439>.

⁴Tecnológico Nacional de México/Instituto Tecnológico de Puebla, gonzalo.espinosa@puebla.tecnm.mx, <https://orcid.org/0009-0007-6604-8874>.

⁵Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, javier.floresme@correo.buap.mx, <https://orcid.org/0000-0002-8815-7015>.

Resumen -- En este manuscrito se muestra una estrategia de aprendizaje tanto en el aula como en un entorno de laboratorio. Esto se resume en estudiar la respuesta dinámica de vigas en cantiléver con el objetivo de simular tacómetros de barras vibrantes. Utilizando la impresión tridimensional, el prototipo presentado es una buena opción para estudiar el fenómeno de resonancia. Se demuestra que las barras en voladizo con la misma longitud reaccionan en armonía cuando solo una de estas es excitada a una sola fuerza en particular.

Palabras Clave: Impresión 3D, Mecánica computacional, Resonancia, Vibraciones mecánicas, Viga en voladizo.

Abstract -- This manuscript demonstrates a learning strategy both in the classroom and in a laboratory environment. This is summarized in studying the dynamic response of cantilever beams with the aim of simulating vibrating bar tachometers. Using three-dimensional printing, the presented prototype is a good choice to study the resonance phenomenon. It is shown that cantilever bars with the same length react in harmony when only one of them is excited to a single particular force.

Key words -- 3D printing, Cantilever beam, Computational mechanics, Mechanical vibrations, Resonance.

INTRODUCCIÓN

El diapasón se usa rutinariamente como un resonador acústico. Proporciona un medio conveniente de producir un sonido de cierto tono, y por lo tanto presenta oportunidades de calibración, no solo en instrumentos musicales. El concepto de resonancia se explota en una variedad de contextos en aplicaciones científicas,

incluyendo AFM (Microscopía de Fuerza Atómica) [1,2], MRI (Imagen de Resonancia Magnética) [3], circuitos eléctricos [4], láser y óptica [5] y nanotecnología [6]. Como fenómeno físico fundamental, juega un papel clave en la enseñanza de las vibraciones. Por otra parte, se ha demostrado que las ventajas únicas de la fabricación aditiva en profesionales y estudiantes de ingeniería fomenta la calidad y aprendizaje a partir de los fracasos para lograr diseños factibles de fabricar. Generalmente, la evaluación de los resultados y funcionalidad de diseños creativos mediante fabricación aditiva se realiza mediante un método analítico o numérico computacional [7,8].

En este breve artículo, describimos el uso de una impresora 3D para facilitar una demostración efectiva de resonancia. El dispositivo es autónomo y no necesita involucrar cualquier medida, ya que la demostración puede basarse en una apreciación puramente visual.

Muchas demostraciones convencionales de resonancia implican el uso de una variable (no trivial) dispositivo o señal de conducción de frecuencia, pero el sistema descrito en este documento implica solo ideas simples, observación directa y una impresora 3D.

La rigidez de flexura de cualquier elemento estructural delgado depende del tipo de material y propiedades geométricas, pero especialmente de la longitud del miembro, ya que la frecuencia natural tiende a escalar con la inversa de la longitud al cuadrado [9]. Por ejemplo, reducir a la mitad la longitud de un voladizo típicamente cuadruplicará la frecuencia natural. Un sistema elástico continuo posee un número innato de frecuencias y formas de modo, pero aquí nos centraremos en la frecuencia más baja en la vibración de flexión de los voladizos prismáticos, es decir, miembros en los que las propiedades de la sección transversal son constantes a lo largo de toda la longitud.

Por lo tanto, dado que todas las dimensiones de diversos voladizos pueden ser impresas con un alto grado de precisión y usando el mismo material, entonces es

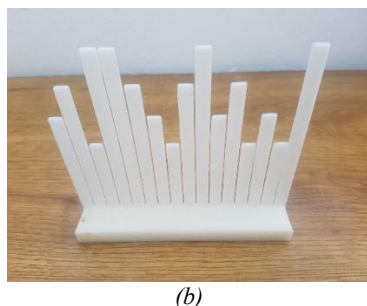
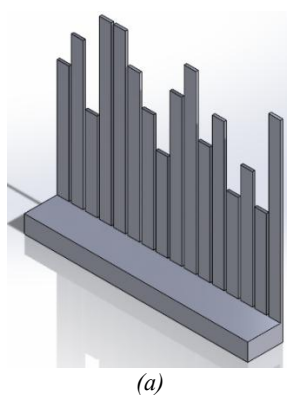
relativamente fácil aislar un solo parámetro de cambio – la longitud. Se puede explorar un análisis detallado basado en la ecuación diferencial parcial del movimiento, y tales sistemas también son susceptibles para aproximar análisis como Rayleigh-Ritz, dicho análisis queda pendiente para otra investigación.

La impresión 3D ha proporcionado un medio útil para explorar la rigidez y las frecuencias naturales de las estructuras de los aviones [10,11], y dada la ubicuidad de las impresoras 3D, no es sorprendente que los componentes impresos en 3D pueden proporcionar un papel útil en el campo de la enseñanza en física y la ingeniería [12,13]. Puede haber deficiencias con algunas de las propiedades mecánicas del ABS, termoplástico utilizado por muchas impresoras 3D, por ejemplo, con la visco-elasticidad y precisión en el módulo de Young [14], pero estos son mínimos para una sola pieza impresa.

DESARROLLO

Se diseña y construye un resonador armónico conformado por voladizos flexibles, manufacturado con material ABS (ver Fig. 1). El prototipo didáctico está conformado por 4 grupos de barras de diferente longitud: 105 mm, 87.5 mm, 70 mm y 52.5 mm. Todas con sección transversal rectangular de 1.51×7 mm. Las propiedades mecánicas del ABS son: Densidad=1060 kg/m³, Módulo de Young=2275 MPa, Coeficiente de Poisson=0.35, Módulo de Bulto=2.52 GPa, Módulo de Corte = 842.59 MPa, Resistencia última a la tensión=40 MPa y Resistencia de fluencia a la compresión=65 MPa.

Figura 1. Diseño en CAD de un resonador armónico de voladizos flexibles (a) e impresión 3D en ABS del modelo (b).



Fuente. Creación propia.

Analíticamente la frecuencia natural de un voladizo flexible se determina mediante la ecuación [15]:

$$f_n = \frac{K_n}{2\pi} \sqrt{\frac{EIg}{wl^4}}, \quad \text{Ec. (1)}$$

donde E es el módulo de Young, g la fuerza de gravedad, l la longitud de la barra y K_n es un factor que se refiere al modo de vibración (ver Tabla 1) y w es la carga por unidad de longitud, incluyendo el peso de la barra y se define por:

$$w = hb\delta g, \quad \text{Ec. (2)}$$

donde h es la altura (1.51 mm), b el ancho de la sección transversal (7 mm) y δ la densidad de masa del material de la barra en voladizo. La variable I en (1) es el segundo momento de inercia de la sección transversal, para una sección rectangular se determina mediante:

$$I = \frac{bh^3}{12}. \quad \text{Ec. (3)}$$

Tabla 1. Factores para los primeros 5 modos de vibración de una viga en voladizo.

Modo de Vibración	K_n
1	3.52
2	22
3	61.7
4	121
5	200

Fuente. Creación propia.

Para cada barra de diferente longitud, se aplica la fórmula (1) para determinar la frecuencia natural en cada modo de vibración, los resultados obtenidos se muestran en la Tabla 2.

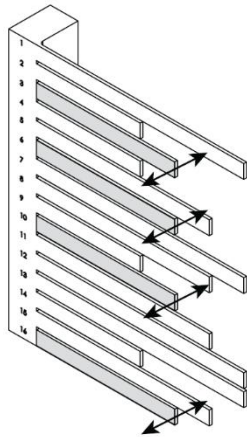
Tabla 2. Resultados del análisis modal para los primeros 5 modos de vibración de la viga en voladizo.

Longitud (mm)	Frecuencia Natural por modo de vibración (Hz)				
	1	2	3	4	5
105	32.4	203	569	1120	1840
87.5	46.7	292	819	1610	2650
70	73	456	1280	2510	4150
52.5	131	821	2300	4510	7460

Fuente. Creación propia.

De forma experimental, si una de las barras de uno de los 4 grupos de longitud se desplaza una cierta posición transversal de tal modo que genere un movimiento vibratorio (ver Fig. 2), las otras tres barras de esa misma longitud comenzarán a vibrar al unísono. El mismo efecto ocurre si cualquiera de los otros voladizos es excitado.

Figura 2. Desplazamiento transversal que genera movimiento vibratorio en las barras en voladizo.



Fuente. Creación propia.

Por lo tanto, la barra en voladizo inicialmente excitada causa que las demás barras de la misma longitud vibren, por lo tanto, se generan frecuencias naturales que producen resonancia armónica. Lo anterior se debe a que la energía generada por el movimiento vibratorio se transfiere estructuralmente a través de la base impresa, especialmente por el bajo coeficiente de amortiguamiento. Observándose que la masa o rigidez de la base no es un factor crítico, pues basta simplemente sostener el prototipo con la mano y excitar una de las barras para mostrar el efecto de resonancia armónica. Además, se hace evidente que con voladizos más largos se pueden obtener amplitudes más grandes y frecuencias más bajas de resonancia (ver resultados de la Tabla 2). De la ecuación (1) se observa un efecto interesante: la frecuencia natural de un voladizo es independiente de su ancho. Esto sucede porque la rigidez (específicamente segundo momento de área, I) escala linealmente con b , pero también lo hace la masa por unidad de longitud, por lo tanto, estos se cancelan.

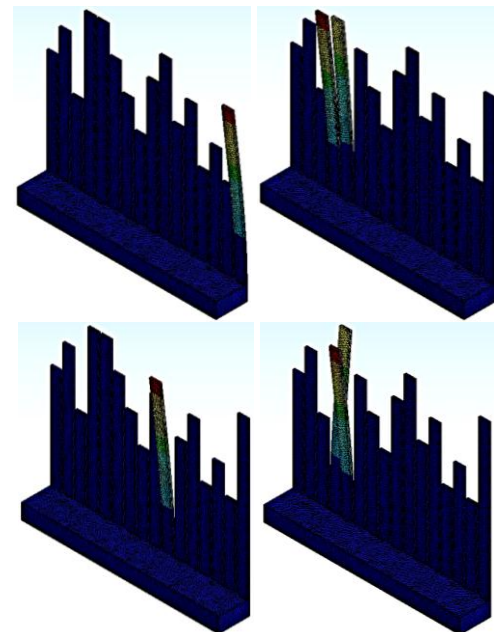
DISCUSIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

A) Análisis Modal

El objetivo del análisis modal en la mecánica estructural es determinar las frecuencias naturales y modos de vibrar de un objeto o estructura durante vibración libre. Es común utilizar el Método de los Elementos Finitos (MEF) para desarrollar el análisis porque, como en otros cálculos usando el MEF, el objeto que se analiza puede tener formas arbitrarias. La interpretación física de los valores propios y vectores propios, los cuales vienen de resolver el sistema, representan las frecuencias y modos de vibrar correspondientes. Algunos de los resultados que se pueden obtener con este tipo de análisis es la deformación y puntos de alto esfuerzo en la estructura debido a cada uno de los modos de vibración. En la Fig. 3 se muestra el análisis modal en vibración libre del prototipo de resonador armónico mediante MEF para la barra en voladizo de 105 mm de longitud, en estas se observa la deformación de las 4 barras a una frecuencia natural

promedio de 32 Hz, que corresponde al primer modo de vibración, dicho valor coincide con el calculado en la tabla 2. Es importante señalar que el software visualiza dicho valor promedio como 4 modos diferentes, pero nótese que el error numérico entre estos es mínimo y por consiguiente solo se simulan las deformaciones de todas las barras de dicha longitud. Una explicación semejante sucede para los voladizos de 87.5 mm y 70 mm de longitud, cuyas frecuencias naturales promedio para el primer modo mediante mecánica computacional son de 46.01 Hz y 71.628 Hz, respectivamente. Lo anterior coincide nuevamente con los resultados reportados en la Tabla 2, en las Figs. 4 y 5 se muestran las deformaciones para cada uno de estos grupos de barras cuando están en resonancia.

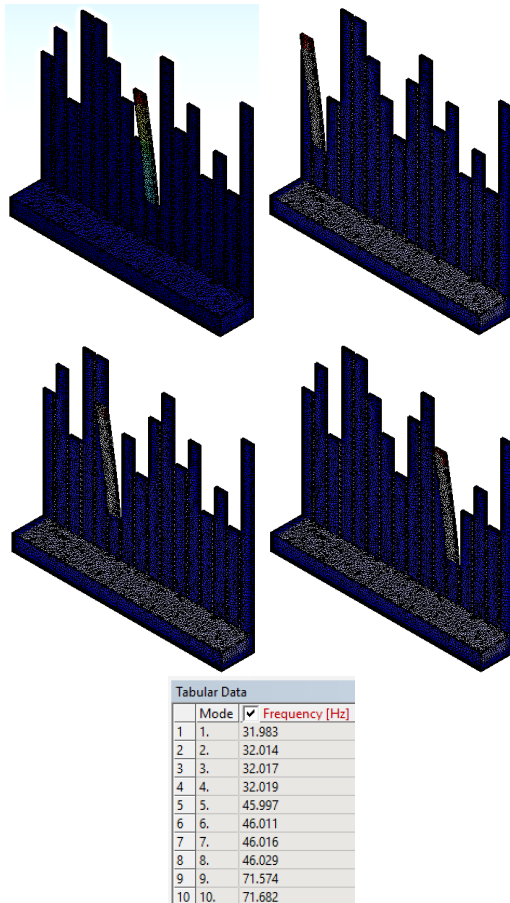
Figura 3. Deformación de los voladizos de 105 mm en un primer modo de vibración promedio de 32 Hz.



Tabular Data		
	Mode	Frequency [Hz]
1	1.	31.983
2	2.	32.014
3	3.	32.017
4	4.	32.019
5	5.	45.997
6	6.	46.011
7	7.	46.016
8	8.	46.029
9	9.	71.574
10	10.	71.682

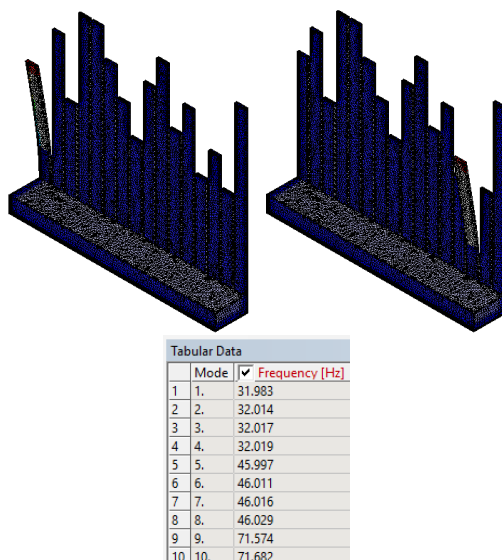
Fuente. Creación propia.

Figura 4. Deformación de los voladizos de 87.5 mm en un primer modo de vibración promedio de 46.01 Hz.



Fuente. Creación propia.

Figura 5. Deformación de los voladizos de 70 mm en un primer modo de vibración promedio de 71.628 Hz.



Fuente. Creación propia.

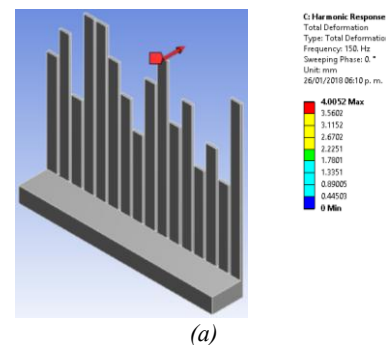
Aunque en la Tabla 2 se muestran los valores para los 5 primeros modos de vibración de cada voladizo, en ocasiones, los únicos modos deseados son los

correspondientes a las menores frecuencias porque pueden ser los modos predominantes en la vibración del objeto (que son los que se obtuvieron para este prototipo mediante MEF). Nota: Debido a la capacidad de los recursos informáticos del departamento, no fue posible modelar computacionalmente la barra en voladizo de 52.5 mm de largo.

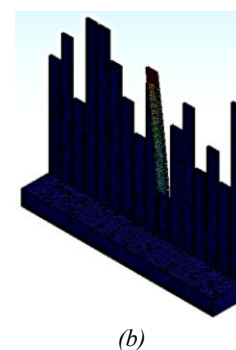
B) Análisis armónico

El análisis armónico se usa para encontrar la frecuencia de respuesta en una estructura cuando está sujeta a una carga oscilante en un cierto modo de vibración. Este tipo de análisis es muy útil, debido a que hay estructuras que tienen frecuencias armónicas que a menudo no se consideran y pueden llegar a ser un factor de falla importante. Entre los resultados que se pueden obtener con este tipo de análisis es la cantidad de deformación sufrida por una estructura a una frecuencia determinada. Otro resultado importante es un gráfico que muestra la deformación de la estructura dentro de un rango definido de frecuencias. Atendiendo lo anterior, se simula un análisis armónico mediante mecánica computacional para el prototipo de resonador armónico, se aplica una carga de 1N en un voladizo de longitud de 105 mm (ver Fig. 6a) en un rango de frecuencias de 0 a 150 Hz y se observa que tiene una deformación máxima de 4 mm (ver Fig. 6b).

Figura 6. Aplicación de carga en uno de los voladizos (a) y resultados de deformación por análisis armónico (b).



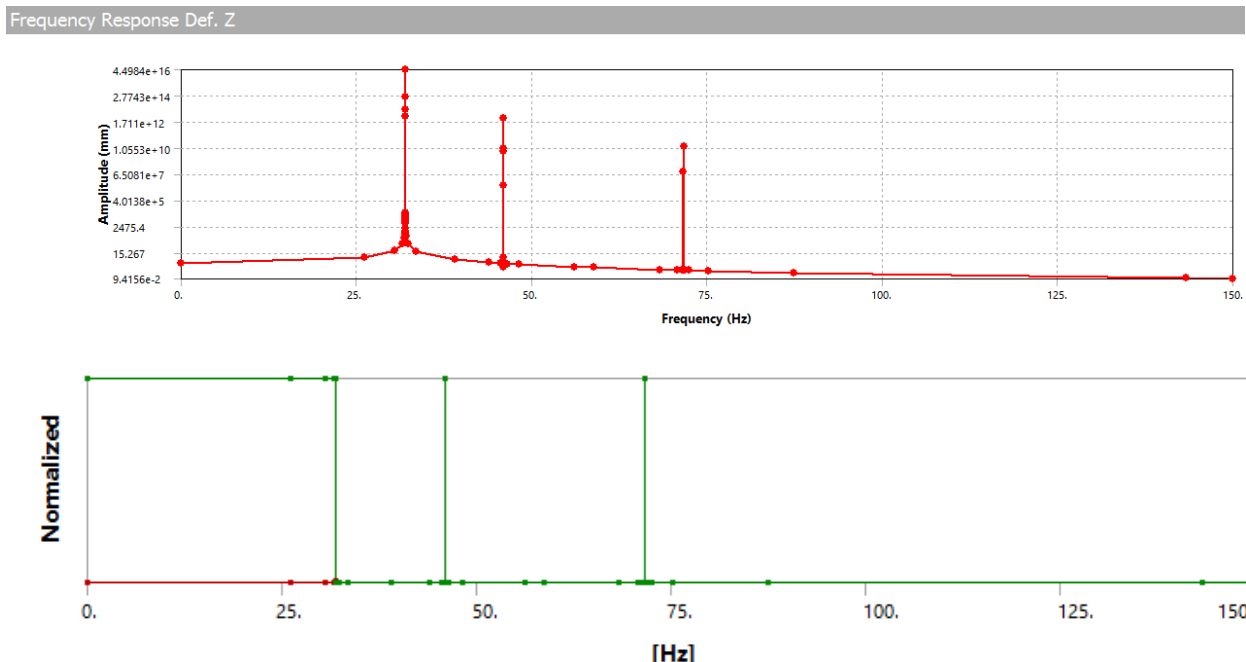
(a)



(b)

Fuente. Creación propia.

Figura 7. Gráfico amplitud vs frecuencia en la dirección de aplicación de la carga.



Fuente. Creación propia.

Finalmente, en la Fig. 7 se presenta un gráfico amplitud vs frecuencia, en la dirección de aplicación de la carga. En este se observan los rangos de valores de deformación crítica del resonador armónico y nótese que estos suceden en los valores de frecuencia que se determinaron en el análisis modal (32 Hz, 46.01 Hz y 71.628 Hz). Por consiguiente, estas son las frecuencias de resonancia.

CONCLUSIONES

El material de introducción convencional respecto a vibraciones mecánicas es común que inicie con el sistema masa-resorte, a pesar de la relativa dificultad para cambiar los parámetros, por ejemplo, agregar otra masa. Sin embargo, para sistemas con masa y rigidez distribuidas, los voladizos simples han sido utilizados para demostrar fácilmente la frecuencia natural de vibración mediante observación. En este documento se muestra una extensión simple, utilizando una impresora 3D, se puede desarrollar una demostración efectiva de resonancia, para caracterizar uno de los parámetros más importante en dinámica estructural y vibración. Las líneas de trabajo a futuro en investigación educativa se pueden centrar en:

- Diseñar un prototipo a partir de un conjunto significativo de voladizos cantiléver, obediendo un patrón periódico de longitudes ligeramente diferentes que funcione como un dispositivo básico de tacómetro mecánico. Para determinar indirectamente la frecuencia de operación (*rpm*) de algún componente sistémico de una máquina (por ejemplo, un motor), a partir

de la vibración crítica de uno de los voladizos. Siempre que la frecuencia dominante de excitación este dentro del rango de frecuencias naturales, sus valores se pueden determinar analítica y numéricamente como se establece en el presente trabajo y validar experimentalmente mediante la adquisición de datos utilizando un tacómetro láser en la punta del cantiléver involucrado.

- Estudiar el espectro de la dependencia temporal *versus* el desplazamiento de la punta de la barra hasta el decaimiento del movimiento por el amortiguamiento del material y correlacionarlo con su respectivo espectro de frecuencia definido a partir de una FFT (Fast Fourier Transform).

AGRADECIMIENTOS

Los autores desean agradecer el financiamiento otorgado por el Tecnológico Nacional de México/Instituto Tecnológico Puebla (Beca No. 18862.23-P), para la presentación del presente trabajo de divulgación.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Melanie Müller, "Imaging surfaces at the space-time limit: New perspectives of time-resolved scanning tunneling microscopy for ultrafast surface science", *Progress in Surface Science*, 2024, vol 99, pp 100727.

- [2] Xiulin Shen, Zhenfei Lv, Kimiyoshi Ichikawa, Huanying Sun, Liwen Sang, Zhaohui Huang, Yasuo Koide, Satoshi Koizumi, Meiyong Liao, "Stress effect on the resonance properties of single-crystal diamond cantilever resonators for microscopy applications", 2022, vol 234, pp 113464.
- [3] S.A. Huettel, A.W. Song and G. McCarthy, "Functional Magnetic Resonance Imaging", 3rd Edition, Sinauer Associates: Sunderland Massachusetts, 2014. ISBN 9780878936274
- [4] Michael H. Tooley, "Electronic Circuits: Fundamentals and Applications", 4th Edition, London:Routledge, 2015. ISBN 1138828920
- [5] A. Allen and J.H. Eberly, "Optical Resonance and Two-Level Atoms", 1st Edition, Dover, 1987. ISBN 0486655334
- [6] Hairui Wang, Chen Wei, Yao Zhang, Yinji Ma, Ying Chen, Heling Wang, Xue Feng, "Tunable Three-Dimensional Vibrational Structures for Concurrent Determination of Thin Film Modulus and Density", J. Appl. Mech., 2022, vol 89(3), pp 031009.
- [7] S. Chekurov, M. Wang, M. Salmi, J. Partanen, "Development, Implementation, and Assessment of a Creative Additive Manufacturing Design Assignment: Interpreting Improvements in Student Performance", Education Sciences, 2020, vol 10(6), pp 156.
- [8] R. Prabhu, T. W. Simpson, S. R. Miller, N. A. Meisel, "Break it down: comparing the effects of lecture- and module-style design for additive manufacturing educational interventions on student designers' learning and creativity", International Journal of Design Creativity and Innovation, 2023, vol 11(4), pp 229–252.
- [9] Lawrence N. Virgin, "Vibration of Axially Loaded Structures", 1st Edition, Cambridge University Press, 2012.
- [10] M. Trujillo, M. Cheng-Guajardo, M. Curtin, A. Abdelkefi, "Experimental characterization of bending modes and investigation of multi-stable solutions of PLA-based additively manufactured beams", Mechanical Systems and Signal Processing, 2024, vol 220, pp 111665.
- [11] M. Trujillo, L. Corral, M. Curtin, A. Abdelkefi, "Comparative investigations on the dynamical responses of ABS and PLA additively-manufactured beams", International Journal of Non-Linear Mechanics, 2023, vol 157, pp 104558.
- [12] Lawrie N. Virgin, "On the Free Vibration of 3D-Printed Structural Elements", J. Phys.: Conf. Ser., 2024, vol 2909, pp 012011.
- [13] S. Khalilpourazary, F. Kafili, "Eco-friendly free-size paper models: Integrating additive manufacturing with laser cutting for educational applications", International Journal of Mechanical Engineering Education, 2025, vol 1(1).
- [14] Lawrence N. Virgin, "Comparative structural stiffness: Exploiting 3D-printing", Am. J. Phys., 2020, vol 88(12), pp 1049–1058.

- [15] Richard G. Budynas, Ali M. Sadegh. "Roark's Formulas for Stress and Strain", 9th Edition, McGraw Hill, 2020. ISBN 1260453758

Tabla de Roles de Contribución

Rol	Autor (es)
Conceptualización	Javier Flores Méndez / Gustavo M. Minquiz
Curación de datos	Marino Viveros Mora
Metodología	Javier Flores Méndez / Gustavo M. Minquiz
Administración del proyecto	Adriana Anel Téllez Méndez
Recursos	Adriana Anel Téllez Méndez
Supervisión	Gonzalo Espinosa Cuatlapantzi
Validación	Javier Flores Méndez / Gustavo M. Minquiz
Redacción (Borrador original)	Gonzalo Espinosa Cuatlapantzi / Marino Viveros Mora
Redacción (Revisión y edición)	Javier Flores Méndez / Gustavo M. Minquiz



Esta obra está bajo
una licencia internacional
Creative Commons Atribución 4.0.